UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Examen Calificación (Parte I)
Doctorado en ciencias mención matemática

Nota. Cada pregunta es de desarrollo, justifique todos los pasos en su desarrollo.

1. Sea X una matriz de tamaño $m \times n$.
   (a) Demuestre que $X^T X$ es semi positiva definida. ¿ Es verdad que $X^T X = 0$ implica que $X = 0$?
   (b) Sean P y Q matrices de tamaño $k \times n$ tales que $PX^T X = QX^T X$. Demostrar que $PX^T = QX^T$.
   (c) Sea G una inversa generalizada de $X^T X$. Demostrar que $XGX^T = X$. ¿ Es verdad que si G_1 y G_2 son cualquiera dos inversas generalizadas de $X^T X$, entonces $XG_1X^T = XG_2X^T$?
   (Recuerde que una inversa generalizada de una matriz A es una matriz G tal que $AGA = A$)

2. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ un subconjunto compacto no vacío y $f : A \to A$ una función continua tal que
$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y), \text{ para todo } x, y \in A.$$
   Demuestre que
   (a) f es inyectiva.
   (b) f^{-1} es continua.
   (c) ¿ Es $f(A) = A$?

3. Considere el grupo $G = \langle x, y : \ x^8 = y^2 = 1, yxy = x^3 \rangle$. Hallar
   (a) todos los elementos de G y sus respectivos ordenes.
   (b) los subgrupos de indice 2 de G. ¿ Alguno de estos subgrupos es abeliano ?
   (c) Hallar los automorfismos del grupo G.

4. Sea X un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. Demuestre que X es denso en $\mathbb{R}$ o existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $X = c\mathbb{Z}$, donde $c\mathbb{Z} = \{ck : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

5. (a) Sea X un espacio localmente compacto y A un subconjunto de X tal que para cada subconjunto compacto K de X, $A \cap K$ es cerrado en X. Demostrar que A es cerrado en X.
   (b) Sea (X, T) un espacio topológico tal que para todo $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado. ¿ Es verdad que para todo $A \subset X$ el conjunto A' de todos los puntos de acumulación de A es un conjunto cerrado ?
   (c) Sea $q : X \to Y$ una aplicación cociente abierta. Demostrar que Y es Hausdorff si y sólo si $\{(x_1, x_2) \in X \times X : \ q(x_1) = q(x_2)\}$ es cerrado en el espacio producto $X \times X$.